

Вопросы по механике

1. Механика - описание движения тел

Система отсчета. Число степеней свободы. Эксп. факт : 6 чисел для описания движения м. т. Уравнения движения. Цилиндрическая и сферическая системы координат. (Обобщенные координаты). Сопутствующая система координат.

2. Обобщенные координаты. Связи. Определение числа степеней свободы

Обобщенные координаты (преобразование декартовых, коэффициенты Ламэ). Число степеней свободы для сложных систем. Задача со связями. Число степеней свободы твердого тела. Классификация связей : идеальные / неидеальные, голономные / неголономные. Общий вид уравнения неголоно мной связи. Связи, определенные неравенствами (неголономные).

3. Принцип д'Аламбера

4. Ковариантная форма уравнений движения

5. Интегрирование уравнений Лагранжа для материальной точки. Движение в центральном поле

6. Связь между энергией системы и функцией Лагранжа. Закон сохранения энергии

7. Инфинитное движение в центральном поле. Рассеяние. Эффективное дифференциальное сечение рассеяния

8. Рассеяние частиц в кулоновском поле. Формула Резерфорда

9. Понятие о функционале и его вариации. Уравнения Эйлера

Функционал. Функционал вида $J[y] = \int_a^b F(y(x), y'(x), x) dx$. Вариация функции. Вариация функционала. Вариационная производная. Уравнения Эйлера. Задача о брахистохроме.

10. Принцип наименьшего действия Гамильтона. Вывод уравнений Лагранжа второго рода из принципа наименьшего действия.

Функционал действия. Постулат наименьшего действия. Замечание об экстремальности. Уравнения Лагранжа. Неоднозначность выбора функции Лагранжа.

11. Принцип наименьшего действия для системы со связями. Метод неопределенных множителей Лагранжа.

Соотношения на вариации координат. Вариация действия. Неопределенные множители Лагранжа. Вид уравнений Лагранжа ддля системы со связями. Эквивалентность голономных связей эффективному потенциалу.

12. Пример решения задачи с неголономными связями (монета на столе)

13. Законы сохранения в лагранжевой механике. Связь с симметрией механической системы. Теорема Нетер.

Бесконечно малые преобразования координат и времени $\tilde{q}_\alpha = q_\alpha + \epsilon \Psi_\alpha(q, t)$; $\tilde{t} = t + \epsilon X(q, t)$
Инвариантность функции Лагранжа. Интеграл движения $\sum_{\alpha=1}^s (\dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L) X - \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \Psi_\alpha - f$

14. Действие как функция координат и времени

15. Доказательство теоремы Нетер

16. Алгоритм решения механической задачи

Выбор обобщенных координат, построение L, связи и их вид, интегралы движения, уравнения Лагранжа, решение уравнений.

17. Тензор момента инерции твердого тела. Главные оси инерции

Кинетическая энергия твердого тела. Линейная и угловая скорости. Выражение кинетической энергии через $\Omega_i \Omega_k$. Тензор инерции. Свойства. Частные случаи.

18. Углы Эйлера

Задача : указать положение собственных осей тв. тела относительно лабораторной СО. Угол прецессии ϕ , угол нутации θ , угол собственного вращения ψ . Связь угловой скорости с углами Эйлера. Функция Лагранжа.

19. Уравнения движения твердого тела в лабораторной СО и в системе главных осей

20. Свободное движение симметричного волчка

21. Преобразование Лежандра. Функция Гамильтона

Переход к новым независимым переменным q и $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$. Функция Гамильтона. Уравнения Гамильтона. Вывод уравнений Гамильтона из принципа наименьшего действия.

22. Действие как функция координат и времени

Действие $S = \int_{t_1}^t (pdq - Hdt)$ вдоль истинных траекторий. Дифференциал действия. Частные производные действия. Уравнение Гамильтона-Якоби.

23. Интегралы движения в методе Гамильтона-Якоби. Скобки Пуассона (СП)

Описание интегралов движения (энергия, циклические координаты, Теорема Нетер, СП). Алгебра скобок Пуассона. Теорема Пуассона. Канонические уравнения (их запись через СП). Динамические СП.

24. Канонические преобразования

Определение канонических преобразований (сохранения вида уравнений Гамильтона). Построение канонических преобразований. 4 типа производящих функций. Равноправие q и p в гамильтоновом формализме. (Пример на КП - гармонический осциллятор).

25. Инварианты канонических преобразований. Теорема Лиувилля

Канонические преобразования не меняют скобок Пуассона. Критерий "каноничности". Теорема Лиувилля. Свойства якобианов. Доказательство теоремы. Сохранения объемов многообразий. Невырожденность $\partial P/\partial p$. Движение - каноническое преобразование.

26. Метод Гамильтона-Якоби интегрирования уравнений движения

Каноническое преобразование, переводящее H в тождественный 0. Уравнение Гамильтона-Якоби на производящую функцию. Физический смысл производящей функции. Алгоритм решения задачи.

27. Решение задачи о движении в центральном поле методом Гамильтона-Якоби

28. Переменные действие-угол (канонические переменные)

Требования к системе (независимость H от t , возможность полного разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби, условно-периодическое движение). Переменные действия - новые импульсы. I_α зависят только от констант. Уравнения движения в канонических переменных. Определение частот движения ($\partial E/\partial I_\alpha$).

29. Адиабатические инварианты

Функция Гамильтона зависит от параметра λ . Адиабатическое изменение параметра. Адиабатические инварианты. Адиабатическая инвариантность переменной действия. примеры.

30. Фазовый портрет движения гамильтоновых систем. Особые точки фазовой плоскости

Зависимость вида фазовой траектории от координат. Регулярные области и особые точки. Уравнение ф. т. вблизи особой точки. Движение частиц вблизи особой точки. (Классификация точек : эллипические, гиперболические)

31. Негамильтоновы системы

Критерий "гамильтоновости" системы. Уравнения движения вблизи особой точки. Классификация особых точек : фокус, гиперболическая особая точка, центр).

32. Колебания системы со многими степенями свободы вблизи положения равновесия. Собственные частоты
Линеаризация. Положение устойчивого равновесия. Вид лагранжиана (матричное представление и координатное представление). Уравнение на амплитуды колебаний. Собственные частоты. Условие ортогональности амплитуд колебаний с различными частотами. Случай вырожденных частот.
33. Главные (нормальные) координаты многомерной колебательной системы
34. Пример многомерной колебательной системы. (Колебания линейной цепочки)
35. Уравнение колебаний упругого стержня
36. Принцип наименьшего действия для непрерывных систем (полей)
Координаты системы. Плотность лагранжиана. Функция Лагранжа. Действие. Замечание о равноправии времени и радиус-вектора в случае полей. Замечание о получении плотности лагранжиана.
37. Функция Лагранжа и уравнения движения колебательной системы с учетом нелинейности. Нелинейные члены 3-ей и 4-ой степени (ангармонизм). Перенормировка частоты колебаний
38. Параметрический резонанс. Метод плавно меняющихся амплитуд
39. Автоколебания. Метод Ван-дер-Поля.
40. Механическая теория возмущений в переменных действие-угол.
Вычисление поправок к действию и угловой переменной. Нелинейный резонанс. Фазовый портрет нелинейного резонанса.